2つの確率変数の和
（平均、分散、共分散）

$E[g(X,Y)]$とは？

$g(a_k,b_j)$ p_{kj}		Y	
		b_1	b_2
X	a_1	$g(a_1,b_1)$ p_{11}	$g(a_1,b_2)$ p_{12}
	a_2	$g(a_2,b_1)$ p_{21}	$g(a_2,b_2)$ p_{22}

$$E[g(X,Y)]=\sum_k\sum_j g(a_k,b_j)p_{jk}$$

次の式が成り立つ

$$E[\alpha\, g(X,Y)] = \alpha\, E[g(X,Y)]$$

$\alpha\, g(a_k, b_j)$ p_{kj}		Y	
		b_1	b_2
X	a_1	$\alpha\, g(a_1, b_1)$ p_{11}	$\alpha\, g(a_1, b_2)$ p_{12}
	a_2	$\alpha\, g(a_2, b_1)$ p_{21}	$\alpha\, g(a_2, b_2)$ p_{22}

次の式が成り立つ

$$E[g(X,Y)+h(X,Y)]$$
$$=E[g(X,Y)]+E[h(X,Y)]$$

$g(a_k,b_j)+h(a_k,b_j)$ p_{kj}		Y	
		b_1	b_2
X	a_1	$g(a_1,b_1)+h(a_1,b_1)$ p_{11}	$g(a_1,b_2)+h(a_1,b_2)$ p_{12}
	a_2	$g(a_2,b_1)+h(a_2,b_1)$ p_{21}	$g(a_2,b_2)+h(a_2,b_2)$ p_{22}

$E[X]$の計算

a_k \ p_{kj}		Y		
		b_1	b_2	Σ
X	a_1	a_1 p_{11}	a_1 p_{12}	$a_1(p_{11}+p_{12})=a_1 p_X(1)$
	a_2	a_2 p_{21}	a_2 p_{22}	$a_2(p_{21}+p_{22})=a_2 p_X(2)$

$$E[X]=\sum_k \sum_j a_k p_{jk}=\sum_k a_k p_X(k)$$

$E[Y]$の計算

b_j p_{kj}		Y	
		b_1	b_2
X	a_1	b_1 p_{11}	b_2 p_{12}
	a_2	b_1 p_{21}	b_2 p_{22}
Σ		$b_1(p_{11}+p_{21})=b_1 p_Y(1)$	$b_2(p_{12}+p_{22})=b_2 p_Y(2)$

$$E[Y]=\sum_k \sum_j b_j p_{jk} = \sum_k b_j p_Y(j)$$

$E[X+Y]$を変形する

$$E[X+Y] = E[X] + E[Y]$$

$$= \mu_X + \mu_Y$$

$V[X+Y]$を変形する

$$V[X+Y]=E[\{X+Y-E[X+Y]\}^2]$$

$V[X+Y]$を変形する

$$\mu_X + \mu_Y$$

$$V[X+Y] = E[\{X+Y-\boxed{E[X+Y]}\}^2]$$

$$= E[\{(X-\mu_X)+(Y-\mu_Y)\}^2]$$

$$= E[(X-\mu_X)^2 + 2(X-\mu_X)(Y-\mu_Y) + (Y-\mu_Y)^2]$$

$$= E[(X-\mu_X)^2] + 2E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] + E[(Y-\mu_Y)^2]$$

$V[X+Y]$を変形する

$$V[X+Y]=V[X]+V[Y]+2Cov[X,Y]$$

$$V[X]=E[(X-\mu_X)^2]$$

$$V[Y]=E[(Y-\mu_Y)^2]$$

$$Cov[X,Y]=E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$$

$V[X+Y]$を変形する

$$V[X+Y]=V[X]+V[Y]+2Cov[X,Y]$$

$Cov[X,Y]$について

$$Cov[X,Y] = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$$

- XとYが同じ傾向を示すとき、共分散は正の値をとる。
- XとYが異なる傾向を示すとき、共分散は負の値をとる。
- XとYが独立ならば、共分散はゼロになる。

A社株の1年後の価格増減 X

- 確率 0.5 で −1，確率 0.5 で ＋5 となるとき，X の期待値と分散・標準偏差を求めよう.

k	a_k	$p_X(k)$	$a_k\, p_X(k)$	$(a_k - \mu)^2\, p_X(k)$
1	-1	0.5	$(-1)\times 0.5 = -0.5$	$(-1-2)^2 \times 0.5 = 4.5$
2	+5	0.5	$5\times 0.5 = 2.5$	$(5-2)^2 \times 0.5 = 4.5$
合計		1.0	$\mu_X = E(X) = 2$	$\sigma_X^2 = V(X) = 9$

期待値

分散

A社株の１年後の価格増減 X

- 確率 0.5 で －1，確率 0.5 で ＋5 となるとき，X の期待値と分散・標準偏差を求めよう．

k	a_k	$p_X(k)$	$a_k p_X(k)$	$(a_k-\mu)^2 p_X(k)$
1	-1	0.5	$(-1)\times 0.5 = -0.5$	$(-1-2)^2 \times 0.5 = 4.5$
2	+5	0.5	$5\times 0.5 = 2.5$	$(5-2)^2 \times 0.5 = 4.5$
合計		1.0	$\mu_X = E(X) = 2$	$\sigma_X^2 = V(X) = 9$

期待値

分散

B社株の１年後の価格増減Ｙ

- 確率 0.5 で －１，確率 0.5 で ＋３ となるとき，Ｙの期待値と分散・標準偏差を求めよう.

j	b_j	$p_Y(j)$	$b_j p_Y(j)$	$(b_j - \mu_Y)^2 p_Y(j)$
1	-1	0.5	$(-1)\times 0.5 = -0.5$	$(-1-1)^2 \times 0.5 = 2$
2	+3	0.5	$3\times 0.5 = 1.5$	$(3-1)^2 \times 0.5 = 2$
合計		1.0	$\mu_Y = E(Y) = 1$	$\sigma_Y^2 = V(Y) = 4$

期待値

分散

B社株の１年後の価格増減Ｙ

- 確率 0.5 で －１，確率 0.5 で ＋３ となるとき，Ｙの期待値と分散・標準偏差を求めよう.

j	b_j	$p_Y(j)$	$b_j\, p_Y(j)$	$(b_j - \mu_Y)^2 p_Y(j)$
1	-1	0.5	$(-1)\times 0.5 = -0.5$	$(-1-1)^2 \times 0.5 = 2$
2	+3	0.5	$3\times 0.5 = 1.5$	$(3-1)^2 \times 0.5 = 2$
合計		1.0	$\mu_Y = E(Y) = 1$	$\sigma_Y^2 = V(Y) = 4$

期待値

分散

$$Case1.\ Cov[X,Y] = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$$

$(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)$ / p_{kj}		$Y-\mu_Y$: -2	$Y-\mu_Y$: 2	$p_X(k)$
$X-\mu_X$	-3	6 / 0.4	-6 / 0.1	0.5
	3	-6 / 0.1	6 / 0.4	0.5
$p_Y(j)$		0.5	0.5	1.0

$$Case1.\ Cov[X,Y]=E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$$

$(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)$ / p_{kj}		$Y-\mu_Y$: -2	$Y-\mu_Y$: 2	$p_X(k)$
$X-\mu_X$	-3	6 / 0.4	-6 / 0.1	0.5
	3	-6 / 0.1	6 / 0.4	0.5
$p_Y(j)$		0.5	0.5	1.0

$$Cov[X,Y]=6\times0.4+(-6)\times0.1+(-6)\times0.1+6\times0.4$$

$$=3.6$$

$$V[X+Y]=9+4+2\times3.6=20.2$$

$$Case2.\ Cov[X,Y] = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$$

$(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)$ p_{kj}		$Y-\mu_Y$ -2	$Y-\mu_Y$ 2	$p_X(k)$
$X-\mu_X$	-3	6 0.1	-6 0.4	0.5
$X-\mu_X$	3	-6 0.4	6 0.1	0.5
$p_Y(j)$		0.5	0.5	1.0

$$Case2.\ Cov[X,Y] = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$$

$(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)$ p_{kj}		$Y-\mu_Y$		$p_X(k)$
		-2	2	
$X-\mu_X$	-3	6 0.1	-6 0.4	0.5
	3	-6 0.4	6 0.1	0.5
$p_Y(j)$		0.5	0.5	1.0

$$Cov[X,Y] = 6\times 0.1 + (-6)\times 0.4 + (-6)\times 0.4 + 6\times 0.1$$

$$= -3.6$$

$$V[X+Y] = 9 + 4 - 2\times 3.6 = 5.8$$

$$Case3.\ Cov[X,Y] = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$$

$(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)$ p_{kj}		$Y-\mu_Y$		$p_X(k)$
		-2	2	
$X-\mu_X$	-3	6 0.25	-6 0.25	0.5
	3	-6 0.25	6 0.25	0.5
$p_Y(j)$		0.5	0.5	1.0

$$Case3.\ Cov[X,Y]=E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$$

$(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)$ p_{kj}		$Y-\mu_Y$		$p_X(k)$
		-2	2	
$X-\mu_X$	-3	6 0.25	-6 0.25	0.5
	3	-6 0.25	6 0.25	0.5
$p_Y(j)$		0.5	0.5	1.0

$$Cov[X,Y]=6\times0.25+(-6)\times0.25$$
$$+(-6)\times0.25+6\times0.25=0$$

$$V[X+Y]=9+4=13$$

$$Cov[X,Y] = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$$

$$Cov[X,Y] = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$$

$$= E[X\,Y - \mu_X Y - \mu_Y X + \mu_X \mu_Y]$$

$$= E[X\,Y] - \mu_X E[Y] - \mu_Y E[X] + \mu_X \mu_Y$$

$$= E[X\,Y] - \mu_X \mu_Y$$

XとYが独立のときの$E[X\,Y]$の計算

$a_k b_j$ $p_X(k)\,p_Y(j)$		Y		
		b_1	b_2	Σ
X	a_1	$a_1 b_1$ $p_X(1)\,p_Y(1)$	$a_1 b_2$ $p_X(1)\,p_Y(2)$	
	a_2	$a_2 b_1$ $p_X(2)\,p_Y(1)$	$a_2 b_2$ $p_X(2)\,p_Y(2)$	

XとYが独立のときの$E[XY]$の計算

$a_k b_j$ $p_X(k)p_Y(j)$		Y		
		b_1	b_2	Σ
X	a_1	$a_1 b_1$ $p_X(1)p_Y(1)$	$a_1 b_2$ $p_X(1)p_Y(2)$	$a_1 p_X(1)\left(b_1 p_Y(1) + b_2 p_Y(2)\right)$ $= a_1 p_X(1)\mu_Y$
	a_2	$a_2 b_1$ $p_X(2)p_Y(1)$	$a_2 b_2$ $p_X(2)p_Y(2)$	$a_2 p_X(2)\left(b_1 p_Y(1) + b_2 p_Y(2)\right)$ $= a_2 p_X(2)\mu_Y$

$$E[XY] = \sum_k \sum_j a_k b_j p_X(k) p_Y(j) = \mu_X \mu_Y$$

$$Cov[X,Y] = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$$

$$= E[X\,Y] - \mu_X\,\mu_Y$$

XとYが独立のとき

$$E[X\,Y] = E[X]\,E[Y] = \mu_X\,\mu_Y$$

だから、$Cov[X,Y] = 0$